

Contrôle de connaissance n° 2

Problème (20 pts)

I) Considérons le moment d'un électron autour d'un point fixe O origine du triade $Oxyz$, le moment cinétique \vec{L} est donné par $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$.

1. Quelle sont les composantes L_x, L_y, L_z de l'opérateur moment cinétique L sur les axes Ox, Oy, Oz ?
2. Calculer le commutateur $[L_i, j]$ avec $L_i = L_x, L_y$ ou L_z . $j=x, y$ ou z .
3. Calculer le commutateur $[L_i, P_j]$ avec $L_i = L_x, L_y$ ou L_z . $P_j = P_x, P_y$ ou P_z
4. Calculer le commutateur $[L_i, L_j]$ avec $L_i = L_x, L_y$ ou L_z . $L_j = L_x, L_y$ ou L_z

II) Les coordonnées sphériques r, θ, φ sont liées aux coordonnées cartésiennes par :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta.$$

5. Exprimer r, θ, φ en fonction de x, y, z .
6. Calculer les dérivées partielles de r, θ, φ par rapport à x, y, z .
7. Calculer les expressions des opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ en coordonnées sphériques.
8. Calculer les composantes du moment cinétique, L_x, L_y, L_z en coordonnées sphériques.
9. A partir du $L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, retrouver cette expression en coordonnées cartésiennes.

On donne :

$$\frac{d(\arccos(f(x)))}{dx} = \frac{f'(x)}{-\sqrt{1-f^2(x)}}, \quad \frac{d(\arctan(f(x)))}{dx} = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

Bonne chance